Дәріс 4
Екінші ретті дербес туындылы дифференциялдық теңдеулерді классификациялау және канондық түрге келтіру.

Екінші ретті дербес туынды дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі

$$F(x,u,..u_{x_i}...,..u_{x_i x_j},...)=0 \qquad (1)$$

өрнекпен жазылады. Ғ функцияның $p_{ij}=u_{x_i x_j}$ бойынша туындыларын $A_{ij}=\dfrac{\partial F}{\partial P_{ij}}$ деп белгілеп, мына сипаттаушы квадраттық форма

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j \qquad (2)$$

құрайық. Егерде (1) жоғары ретті туындылары бойынша сызықты теңдеу болса, яғни

$$F=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}+F_1(x,u,..u_{x_i},...)=0 \qquad (3)$$

онда сипаттауышы квадраттық форма (2) мына түрде

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \qquad (4)$$

жазылады.

Белгілі әрбір тұрақты $x=x^0$ н8ктеде квадраттық форма (4) ерекше емес аффиндік түрлендірумен

$$Q=\sum_{i=1}^{n} q_i\mu_i^2 \qquad (5)$$

Канондық формаға келтіруге болады.

Анықтама. Егерде $\forall x\in\Omega$ нүктеде (5) канодық форманың коффициенттері мына шарттарды қанағаттандырса:

а) $q_i\neq 0$ және барлығы бір таңбалы;

б) $q_i\neq 0$ және біреуі немесе бірнешеуі оң, қалғандары теріс;

с) q_i-біреуі немесе бірнешеуі нөлге тең, қалғандары бір таңбалы, онда Ω аймағында (3) теңдеуді сәйкес элиптикалық, гиперболалық және параболалық типке жатады дейді. (1) сызықты емес дифференциалдық квадраттық форманы (2) пайдаланып осылай типтерге бөлуге болады. Бірақ квадраттық форма (2) коэффициенттері A_{ij} теңдеудің шешімдеріне тәуелді болғандықтан (1) теңдеудің типтерін шешімдеріне байланысты анықтайды.

Егерде $\overline{F}=(F_1,F_2,..F_m)$-вектор, ал белгісіз $\overline{u}=(u_1,u_2,..u_m)$-вектор болса, онда бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпы көрінісі

$$F_i(x,u_1,...,u_m,...,\nabla u_1,....,\nabla u_m)=0, i=1,2,..m \qquad (6)$$

мұнда $\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\dfrac{\partial}{\partial x_2},...,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$-Гамильтон операторы.

F_i функциялардың $P_{kj}=\dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}$ аргументтері бойынша туындыларын A^i_{ik} белгілеп, мына сипаттаушы полиформа аламыз:

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n) = \det \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial P_{kj}} \right\| \lambda_j = \det \sum_{j=1}^{n} \left\| A_{ik}^{j} \right\| \lambda_j \qquad (7)$$

Екі белгісіз екі теңдеу үшін (7) квадраттық форма, оны

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n) = \det \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial P_{1j}} & \frac{\partial F_1}{\partial P_{2j}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial P_{1j}} & \frac{\partial F_2}{\partial P_{2j}} \end{matrix} \right\| \lambda_j \qquad (8)$$

түрінде жазуға болады.

Егер де (6) туындылары бойынша сызықты жүйе болса,

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{xj} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_{xj} + f_i(x,u,v), i = 1,2$$

онда (8) сипаттаушы форма

$$Q = \det\left[\begin{pmatrix} a_{11} b_{11} \\ a_{21} b_{21} \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} a_{12} b_{12} \\ a_{22} b_{22} \end{pmatrix} \lambda_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} b_{1n} \\ a_{2n} b_{2n} \end{pmatrix} \lambda_n \right] =$$

$$\left| \begin{matrix} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + ..b_{1n}\lambda_n \\ a_{21}\lambda_2 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2n}\lambda_n b_{21}\lambda_1 + b_{22}\lambda_2 + ..b_{2n}\lambda_n \end{matrix} \right|$$

Белгісіз u(x,y) функция үшін мына дердес туындылы теңдеуді қарастырайық:

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + F(x,y,u_x,u_y) = 0 \qquad (9)$$

мұндағы $a_{ij}(x,y)$ коэффициенттер $\forall(x,y) \in \Omega$ үшін белгілі нақты үзіліссіз функциялар. Дискриминантын $\Delta(x,y) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ деп белгілейік, ал оның квадраттық формасы

$$Q(\lambda_1,\lambda_2) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 \qquad (10)$$

1-анықтама. Егер (9) теңдеудің $\forall(x,y) \in \Omega$ үшін дискриминанты $\Delta > 0$ болса, онда ол дифференциалдық теңдеу гиперболалық, $\Delta < 0$ болса эллиптикалық, $\Delta = 0$ - параболалық теңдеу деп аталады.

2-анықтама. Егер $\varphi(x,y) = 0$ қисық сызық мына сызықтық емес бірінші ретті

$$Q(grad\varphi) = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \qquad (11)$$

теңдеуді қанағаттандырса, ол қисық сипаттаушы деп айтамыз.

Бұл (11) сызықты емес теңдеуді

$$\left[a_{11}\varphi_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta})\varphi_y\right]\left[a_{11}\varphi_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta})\varphi_y\right] = 0$$

көбейткішке жіктеп, мынадай

$$\begin{cases} a_{11}\varphi_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta})\varphi_y = 0 \\ a_{11}\varphi_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta})\varphi_y = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

бірінші реттік сызықтық дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз.

$$\frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} + \sqrt{\Delta}}, \frac{dx}{a_{11}} = \frac{dy}{a_{12} - \sqrt{\Delta}}$$

Оларды бір біріне көбейтіп

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}dx^2 = 0 \qquad (13)$$

Көп аргументті $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция үшін мына дифференциалдық теңдеуді

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x) \qquad (14)$$

қарастырайық, мұндағы $a_{ij}(x)$,$b_i(x)$,c(x)-коэффициенттері мен f(x)-бос мүше $\Omega \in \forall x$ облыста үзіліссіз белгілі функциялар.

3-анықтама. Егер R^n кеңістікте көп аргументті функция $\varphi(x)$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\varphi_i \varphi_j = 0 \qquad (15)$$

теңдеуді қанағаттандырса, онда $\varphi(x)$=C бет (14) теңдеудің сипаттауыш беті деп аталады.